1. Толық дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 1: Егер бірінші ретті

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

теңдеуінің P(x,y) және Q(x,y) коэффиценті

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (2)$$

шартын қанағаттандыратын болса, онда оның сол жақ бөлігі U(x,y) функциясының толық дифференциалы болып табылады. Бұл теңдеу *толық дифференциалдық теңдеу* деп аталады.

Бірінші әдіс: Жалпы шешімі

$$U(x,y)=C \qquad (3)$$

$$U(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y) \qquad (4)$$

өрнегімен есептелінеді. Мұнда

$$\frac{\partial U}{\partial y}=Q(x,y) \qquad (5)$$

екенін ескеру қажет.

Екінші әдіс: $U(x,y)$ функциясын

$$U=\int_{xo}^{x}P(x,y)dx+\int_{yo}^{y}Q(x_o,y)dy \qquad (6)$$

немесе

$$U=\int_{xo}^{x}P(x,y_o)dx+\int_{yo}^{y}Q(x,y)dy \qquad (6')$$

өрнектері арқылы есептеуге болады, мұндағы $x_o, y_o - P(x,y), Q(x,y)$ функцияның анықталу облыстарына тиісті сандар.

Үшінші әдіс: Бірінші ретті толық дифференциалық теңдеулерге келтірілетін теңдеулер. $\frac{\partial p}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$ болғанда (1) теңдеуін кейбір жағдайда толық дифференциалдық теңдеулерге келтіруге болады.

Ол үшін (1) теңдеуін интегралдаушы көбейткіш деп аталатын $M(x,y)$ функциясына көбейту қажет.

Егер $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ функциясы тек х-тен тәуелді болса, онда интегралдаушы көбейткіш

$$M = e^{\int\left(\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\right)dx} \qquad (7)$$

Егер $\dfrac{-\dfrac{\partial P}{\partial y}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}}{P}$ функциясы тек у-тен тәуелді болса, онда интегралдаушы көбейткіш

$$M = e^{\int\left(\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}}{P}\right)dy} \qquad (8)$$

түрінде алынады.

2. Бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеулер

Анықтама 2:

$$y'+P(x)y=Q(x) \qquad (9)$$

түріндегі теңдеу у және оның у' туындысына қатысты *сызықтық теңдеу* деп аталады. Мұндағы P(x) пен Q(x) функциялары х-тан тәуелді берілген функциялар.

Сонымен

y'+P(x)y=Q(x)- у-ке байланысты сызықтық теңдеу

x'+M(y)x=N(y)- х-ке байланысты сызықтық теңдеу.

Сызықтық теңдеулерді шешу әдістері:

1-әдіс: Бернулли ауыстыруы

$$y=u\,v$$

$$y'=u'v+uv' \qquad (10)$$

көмегімен шешу

2-әдіс: Еркін тұрақтыны вариациалауды қолдану.

1. біртекті теңдеу түріне келтіреміз;

2. жалпы шешіміндегі c тұрақтысын c=c(x) функциясы түрінде белгілейміз;
3. берілген бастапқы біртексіз теңдеуге қойып жалпы шешімін табамыз.
Анықтама 3:

$y'+P(x)y=y^nQ(x)$ немесе $x'+P(y)x=Q(y)x^n$, $n\neq 0$, $n\neq 1$ (11)

түріндегі теңдеу *Бернулли теңдеуі* деп аталады. Оның сызықтық теңдеуден айырмашылығы оң жақ бөлігінде y-тің белгілі бір дәрежесі енгізіледі де шешілуі сызықтық теңдеулердегідей жүргізіледі.
y^n-не бөліп, оны теріс дәрежесімен алып жазсақ:

$$\frac{y'}{y^n}+\frac{P(x)y}{y^n}=\frac{Q(x)y^n}{y^n}$$

$$y'y^{-n}+P(x)y^{1-n}=Q(x) \qquad (12)$$

теңдеуіне келеміз,

$$z=y^{1-n}$$

белгілеуін енгізіп

$z'=(1-n)y^{-n}y' \Rightarrow y^{-n}y'=\dfrac{z'}{1-n}$ соңғы мәнді (12), өрнегіне қойсақ

$$\frac{z'}{1-n}+P(x)z=Q(x)$$

теңдеудің екі бөлігін де (n-1)-ге көбейтейік

$$z'+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x) \qquad (13)$$

$$z=uv, z'=u'v+uv'$$

Бернули ауыстыруын енгіземіз.